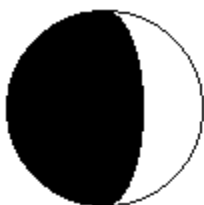


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Централна комисия за провеждане на олимпиадата по АСТРОНОМИЯ

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

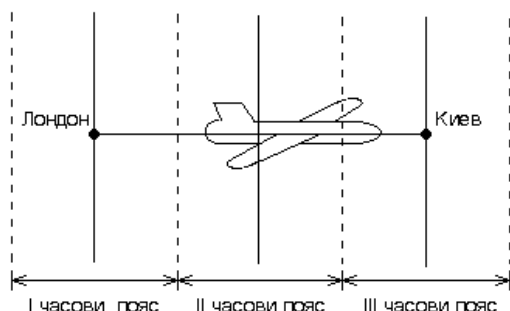
от II кръг на IV национална олимпиада по астрономия, 11 януари 2001 г.
УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС

Задача 1 (10 точки): На 9 януари е имало лунно затъмнение. Лунното затъмнение се получава, когато Луната навлезе в сянката, хвърляна от Земята. То може да се случи само когато Луната е във фаза пълнолуние. Следователно на 9 януари Луната е била в пълнолуние (**3 т.**). Лунните фази се редуват през период приблизително 29.5 денонощия (синодичен месец). Времето между две последователни основни лунни фази трябва да е около една четвърт от този интервал или 7.4 денонощия. Ето защо на Нова година, т.е. 9 дни преди 9 януари, Луната е била във фаза малко преди първа четвърт (**2 т.**). Тъй като във фаза първа четвърт ние виждаме осветена точно половината от видимия лунен диск, то в новогодишната нощ се е виждала осветена малко по-малко от половината от лунния диск и Луната е изглеждала така (**2 т.**):



Във фаза първа четвърт Луната е на 90° източно от Слънцето. Тъй като на фона на звездното небе Луната се движи от запад на изток, то малко преди първа четвърт Луната е била на малко по-малко от 90° източно от Слънцето. Следователно Слънцето, което осветява Луната, е било на запад от нея и затова осветената част от видимия лунен диск е била западната, т.е. дясната за нас (**3 т.**).

Задача 2 (10 точки):



Централните меридиани на всеки два съседни часови пояса отстоят на 15° един от друг по географска дължина. Лондон и Киев лежат на централните меридиани на I и III часови пояси съответно, и на един и същи географски паралел, по който става движението на самолета. Границите на часовите пояси

са прекарани точно по меридианите, отстоящи на по 7.5° от централните меридиани. Самолетът изминава разстоянието от Лондон до Киев за два часа, като се движи с постоянна скорост. Това означава, че самолетът изминава ширината на един часови пояс за 1 час, а на половината от часови пояс за половин час (**1 т.**).

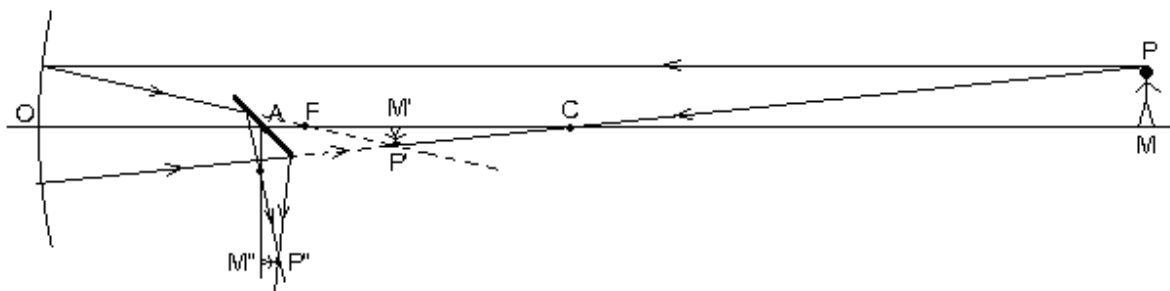
Пътниците ще пропуснат отбелязването на Новата година, ако преминат през I и II часови пояси преди настъпването ѝ по времето, важащо за тези пояси, но навлязат в III часови пояс след настъпването на Новата година по неговото поясно време. Другата възможност е самолетът да напусне I часови пояс преди настъпването на Новата година там, но да навлезе във II часови пояс след настъпването на Новата година по неговото поясно време. Така че има два различни интервала от време, които представляват решение на задачата (**1 т.**).

Първият интервал е от $20^{\text{h}}30^{\text{m}}$ до $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$ (**1 т.**). Ако излети в $20^{\text{h}}30^{\text{m}}$ по лондонско време от Лондон, самолетът ще стигне до границата между I и II часови пояси за половин час, т.е. в $21^{\text{h}}00^{\text{m}}$. Това ще е в $22^{\text{h}}00^{\text{m}}$ по времето във II часови пояс. За един час самолетът ще прелети над II часови пояс и ще стигне до границата му с III часови пояс в $23^{\text{h}}00^{\text{m}}$. В този момент в III часови пояс ще стане $00^{\text{h}}00^{\text{m}}$ на 1 януари и пътниците ще отбележат настъпването на Новата година на границата между двата пояса. Следователно ако самолетът излети от Лондон само миг по-късно от началото на горепосочения интервал, при навлизането му в III часови пояс там Новата година вече ще е настъпила и

пътниците ще пропуснат отбелязването на този момент. Ако самолетът излети от Лондон в 21^h30^m по лондонско време, т.е. в края на разглеждания интервал, в 22^h00^m той ще е на границата между между I и II часови пояси. По времето на II часови пояс това ще е в 23^h00^m. За един час той ще прелети над II часови пояс и ще е на границата с III часови пояс в 00^h00^m на 1 януари по времето на II часови пояс. Следователно ако самолетът излети от Лондон само миг преди 21^h30^m, Новата година няма да може да се посрещне. Но ако излети в 21^h30^m или малко по-късно, пътниците ще могат да посрещнат Новата година, прелитайки над II часови пояс **(3 т.)**.

Такава възможност те ще имат, обаче, само ако излетят от Лондон във времето между 21^h30^m и 22^h30^m. След това настъпва вторият интервал от време на излитане, при който посрещането на Новата година се пропуска от пътниците. Това е интервалът от 22^h30^m до 23^h30^m по лондонско време **(1 т.)**. Ако самолетът излети след 22^h30^m по лондонско време, той стига до границата между I и II часови пояси след 23^h00^m по лондонско време, а във II часови пояс Новата година вече е настъпила. Но ако самолетът излети в 23^h30^m или по-късно по лондонско време, то пътниците ще имат възможността да посрещнат Новата година на борда му, още по лондонско време, преди самолетът да е достигнал до границата с II часови пояс **(3 т.)**.

Задача 3 (10 точки):



Астрономът MP се намира на разстояние $OM = 1 \text{ km}$ от телескопа. Фокусното разстояние на огледалния обектив на телескопа е $OF = f = 1000 \text{ mm}$. Означаваме с F фокуса на обектива на телескопа и с C – центъра на сферата, от която този обектив е част ($OC = 2OF$). С $M'P'$ означаваме образа на астронома, който би се получил, ако огледалото A го няма, а с $M''P''$ – образът на астронома, който се получава, когато огледалото A е на мястото си **(2 т.)**. Съгласно добре познатата формула от геометричната оптика:

$$1 / OM + 1 / OM' = 1 / f \quad (1) \quad (2 \text{ т.})$$

Оттук получаваме:

$$OM' = f \cdot OM / (OM - f) \quad (1 \text{ т.})$$

$$OM' = 1001 \text{ mm}$$

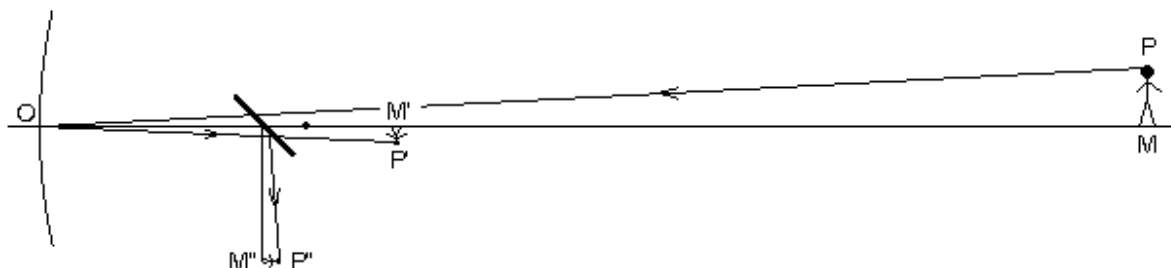
С помощта на плоското огледало A, наклонено под ъгъл 45° към оптичната ос на телескопа, образът на астронома се отклонява на разстояние $AM'' = 200 \text{ mm}$ от оптичната ос. Тъй като очевидно $AM' = AM''$, то търсеното разстояние OA, на което трябва да се постави огледалото A, за да е изпълнено това условие, е:

$$OA = OM' - AM' = OM' - AM'' \quad (1 \text{ т.})$$

$$OA = 801 \text{ mm} \quad (1 \text{ т.})$$

Забележка: На дадения чертеж някои от показаните светлинни лъчи, тръгващи от астронома, с чиято помощ е построен неговият образ, "преминават" през огледалото A, преди да стигнат до обектива на телескопа. Такъв е лъчът, идващ от главата на астронома и минаващ през фокуса на обектива, както и лъчът, идващ от краката на астронома и съвпадащ с оптичната ос на обектива (на чертежа той не е означен със стрелки). На практика това, разбира се, е невъзможно и образът на астронома не се получава от тези лъчи. Всъщност той се получава от други светлинни лъчи, тръгващи от самия астроном в други посоки – не бива да се забравя, че всяка точка от наблюдавания обект излъчва във всички посоки. Това са лъчи, на които огледалото A не пречи да

достигнат до обектива на телескопа. Техният ход, обаче, по-трудно се построява. Но те формират образа на астронома на същото място и в същия размер, както и "фиктивните" лъчи, използвани от нас. Ние сме избрали именно тях само за улеснение, понеже правилата за тяхното построяване са най-прости. Същото се отнася и за следващия чертеж.



Нека с $MP = H$ отбележим истинския ръст на астронома, а с $M''P'' = h$ височината на неговия образ. Тъй като $M''P''$ е огледален образ на образа $M'P'$, то очевидно $M'P' = h$. Лъчът PO и лъчът OP' сключват равни ъгли с оптичната ос, съгласно закона за падащите и отразените лъчи:

$$\angle POM = \angle P'OM' = \alpha$$

Триъгълниците $\triangle POM$ и $\triangle P'OM'$ са подобни и следователно:

$$h / H = OM' / OM \quad (2 \text{ т.})$$

$$h / H = 1.001 \text{ m} / 1000 \text{ m} \approx 1 / 1000 \quad (1 \text{ т.})$$

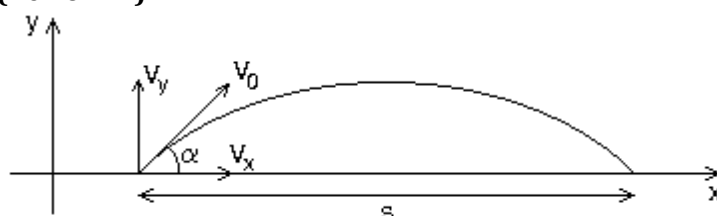
Образът на астронома е около 1000 пъти по-малък от самия астроном.

Има и други два варианта на изчисляване на това съотношение, като се използва първият от дадените чертежи. Тези два варианта се състоят в използването някое от следните две равенства:

$$PM / P'M' = OF / FM' \quad \text{или} \quad PM / P'M' = MC / M'C$$

и като го комбинираме с (1), стигаме до същия резултат.

Задача 4 (10 точки):



От физиката е известно, че при хвърляне на тяло с начална скорост v_0 , сключваща ъгъл α с хоризонта, най-голяма далечина s на полета се постига, когато $\alpha = 45^\circ$. Предполагаме, че спортистът знае това и в хода на тренировките си е изработил способ за оптимално хвърляне на гюлето. Всъщност обаче, крайният резултат, който ще получим като решение на задачата, не зависи от този ъгъл, стига само той да е един и същ, когато гюлето се тласка на Земята и когато се тласка на Луната **(1 т.)**. При положение, че $\alpha = 45^\circ$, за хоризонталната и вертикалната компоненти на началната скорост v_0 можем да напишем:

$$v_{0x} = v_{0y} = v_0 \sqrt{2} \quad (1) \quad (1 \text{ т.})$$

Разглеждаме случая, когато гюлето се тласка на Земята. То лети по парабола. При достигане на максималната височина на полета вертикалната компонента на скоростта на гюлето става нула:

$$0 = v_{0y} - gt \quad (1 \text{ т.})$$

Тук g е земното ускорение, а t е времето, за което гюлето достига до максималната височина на полета си. Намираме времето t :

$$t = v_{0y} / g \quad (2) \quad (1 \text{ т.})$$

Втората част от траекторията се изминава за същото време и следователно общото време на полета е $2t$ (1 т.). По оста Х гюллето се движи с постоянна скорост, равна на v_{0x} , и изминава разстояние s . Следователно:

$$s = v_{0x} \cdot 2t \quad (1 \text{ т.})$$

Замествайки тук получените стойности от (1) и (2), намираме:

$$s = v_0^2 / g \quad (1 \text{ т.})$$

На Луната спортистът ще има същата мускулна сила и ще е способен да придаде на гюллето същия начален импулс, а значи и същата начална скорост v_0 , понеже гюллето има същата маса. (Считаме, че гюлеттаскачът се намира в някоя от залите на бъдещата обитаема лунна база, защото ако е на откритата лунна повърхност, ще трябва да е със скафандър, който много ще му пречи. Предполагаме също, че е успял да се приспособи към по-слабата гравитация на Луната и да развие същите сръчности при изтласкването на гюллето, каквито е имал на Земята). Ако s_L е разстоянието, на което се изтласква гюллето в този случай, то:

$$s_L = v_0^2 / g_L \quad (1 \text{ т.})$$

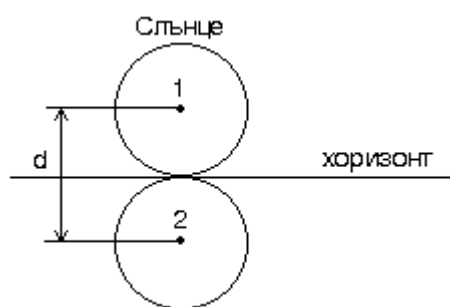
където g_L е ускорението на силата на тежестта на Луната. Тъй като $g_L = g / 6$, получаваме:

$$s_L = 6s \quad (1 \text{ т.})$$

$$s_L = 120 \text{ m} \quad (1 \text{ т.})$$

Забележка: При изтласкването спортистът прилага към гюллето дадена сила – такава, каквато е способен да упражни със своите мускули – за определен интервал от време. Именно силата е величината, която е една и съща, независимо дали спортистът се намира на Земята, или на Луната. Но при изтласкването на гюллето тази сила се прилага под ъгъл спрямо хоризонта. Вертикалната компонента на импулса, който получава гюллето, се определя от разликата между вертикалната компонента на мускулната сила, приложена от спортиста, и силата на тежестта. Тъй като на Луната и на Земята силата на тежестта, действаща върху гюллето, е различна, то вертикалната компонента на импулса, който то ще получи в двата случая, ще е различна. Ето защо твърдението, че гюллето ще получи един и същ импулс на Луната и на Земята, не е точно. На Луната то ще получи по-голям импулс. Така че, даденото по-горе решение представлява оценка за минималната далечина на полета на гюллето на Луната.

Задача 5 (10 точки):



На екватора Слънцето залязва вертикално надолу към хоризонта (1 т.). От началото на заеза (положение 1) до края му (положение 2) Слънцето се премества на разстояние, равно на видимия му ъглов диаметър $d = 32'$ (1 т.). Едно пълно завъртане по небесната сфера, или 360° , при своето видимо денонощно движение Слънцето

извършва за едно слънчево денонощие, или 24^h (1 т.). Следователно за 1^h Слънцето се премества на $360^\circ / 24 = 15^\circ$, а 1° изминава за време $60^{\text{min}} / 15^\circ = 4^{\text{min}}$. Трябва да намерим времето t , за което Слънцето изминава видимия си ъглов диаметър. Първо превръщаме $32'$ в градуси:

$$d^\circ = 32' / 60 \approx 0^\circ.53$$

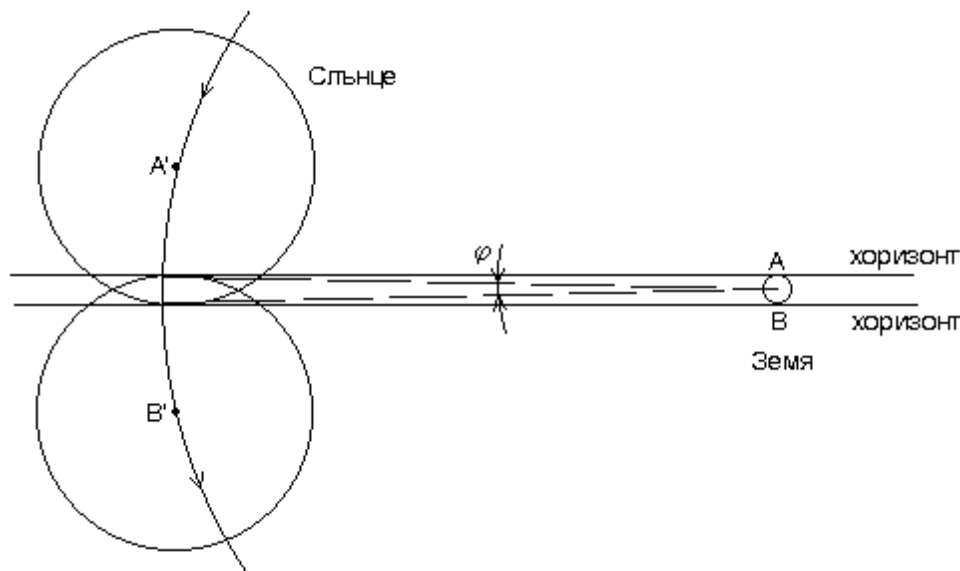
Щом 1° се изминава за 4^{min} , то:

$$t = 0^\circ.53 \times 4^{\text{min}} \approx 2.13^{\text{min}} = 2^{\text{min}}08^{\text{sec}} \quad (2 \text{ т.})$$

Необходимо е да се отбележи, че този резултат се отнася само за случаите, когато Слънцето се намира на небесния екватор, т.е. в пролетната или есенната равноденствена точка. Ако деклинацията δ на Слънцето не е нула, то се движи по денонощен паралел,

който не е голям кръг от небесната сфера. Тогава времето за залеза се удължава – полученият по-горе резултат трябва да се умножи с $1/\cos \delta$. Максимална стойност на този фактор се получава за дните на лятното и зимното слънцестояние, когато $\delta = \pm 23.5^\circ$, и $1/\cos \delta \approx 1.09$. Тогава $t = 2^{\text{min}}19^{\text{sec}}$. Тук обаче, не се изисква такава точност, за да се признае решението на задачата за правилно.

Тъй като линейният диаметър на Слънцето е по-голям от диаметъра на Земята, то за диаметрално противоположните точки на земния екватор А и В ще съществува интервал от време, през който и за двете точки ще има части от видимия слънчев диск, които да са над хоризонта **(1 т.)**.



Както се вижда от чертежа, това ще е интервалът от време, за който центърът на слънчевия диск ще се премести при своето видимо денонощно движение от точка А' до точка В' **(1 т.)**. Слънцето трябва да измине ъглово разстояние, равно на неговия видим ъглов диаметър d минус ъгъла ϕ . Това е ъгълът, под който Земята би се виждала от разстояние, равно на линейното разстояние до Слънцето **(1 т.)**. Линейният диаметър на Слънцето е 109 пъти по-голям от линейния диаметър на Земята. Следователно видимият от Земята ъглов диаметър на Слънцето е 109 пъти по-голям от ъгъла ϕ . Ъгловото разстояние А'В' ще бъде равно на $d - (d / 109) = (108/109)d$. Оттук и времето, за което Слънцето изминава това разстояние, ще е:

$$t_1 = (108/109) t \quad \textbf{(1 т.)}$$

при което използваме получения вече резултат за времето t – времето, за което Слънцето изминава целия си ъглов диаметър.

$$t_1 \approx 2^{\text{min}}07^{\text{sec}} \quad \textbf{(1 т.)}$$

Забележка: Тук не отчитаме рефракцията. Бихме могли да оценим приблизително нейното влияние, като имаме предвид, че на хоризонта ъгълът на рефракция може да достигне $30'$. Това значително удължава търсения интервал от време, през който части от видимия слънчев диск има над хоризонта и за двете точки А и В. Центърът на видимия слънчевия диск изминава ъглово разстояние от $30'$ за време, равно на $0.5^\circ \times 4^{\text{min}} = 2^{\text{min}}$. Части от слънчевия диск са започнали да се виждат над хоризонта за точка В именно 2^{min} преди достигането на центъра на слънчевия диск в точка А'. Освен това части от слънчевия диск са продължили да се виждат над хоризонта за точка А също 2^{min} след като центърът на слънчевия диск премине през точка В'. Следователно търсеният интервал от време е:

$$2^{\text{min}} + 2^{\text{min}}07^{\text{sec}} + 2^{\text{min}} \approx 6^{\text{min}}.$$